1

O algoritmo de Gale-Shapley

Em vários problemas cotidianos, os preços não podem ser um mecanismo de alocação de recursos. Por exemplo, a atribuição de órgãos humanos a pacientes para transplante, por motivos éticos, não pode ser regulada por pagamentos financeiros, dando prioridade a quem possa pagar mais.

Nós estudaremos a questão de estabilidade nas resoluções desses problemas. Exemplo de sua aplicação é a promoção, de forma abstrata, de pares perfeitos (envolvendo, assim, dois conjuntos de agentes), como de uniões entre homens e mulheres, estudada a partir do questionamento: "Como deve ser combinada uma mesma quantidade de homens e mulheres da melhor forma possível, respeitando suas preferências individuais?".

A solução encontrada por David Gale e Lloyd Shapley (1962) foi a utilização de regras pré-estabelecidas segundo um *algoritmo*, ou procedimento formado por passos ou etapas. Esse algoritmo baseia-se no "princípio da aceitação postergada" (em inglês *deferred acceptance*), isto é, as propostas de casamento somente serão definitivamente aceitas ao final do processo.

1.1 Conceitos de estabilidade e bloqueio

Vamos considerar a situação em que, havendo dois conjuntos de indivíduos ou *agentes*, estes devam ser combinados uns com os outros da melhor forma possível, formando uma bijeção (correspondência um a um) entre os dois conjuntos, chamada *emparelhamento*.

↪**Definição:** O emparelhamento é *instável* se houver um agente A pareado a um agente X, mas que preferiria estar com um agente Y, que também o preferiria. Nessa situação, há um "ganho inexplorado", uma vez que, se A se unisse a Y, ambos estariam em uma melhor situação segundo suas preferências.

↪**Definição:** O emparelhamento é *estável* se não for instável.

No seguinte exemplo, temos 3 homens e 3 mulheres: Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Ana (A); Beatriz (B) e Carolina (C). Cada indivíduo tem uma lista de preferências, em que ordena os indivíduos do grupo oposto (com a utilização do símbolo ">"):

Xavier:	$B > C > A$	Ana:	$X > Z > Y$
Yuri:	$A > C > B$	Beatriz:	$X > Y > Z$
Zé:	$B > C > A$	Carolina:	$Y > X > Z$

Isso significa que Xavier prefere Beatriz, depois Carolina, e, por último, Ana.

A partir desses elementos, quais combinações entre homens e mulheres seriam possíveis? Quais desses emparelhamentos seriam adequados segundo a descrição acima de estabilidade?

Contamos três opções de esposa para o primeiro homem, sobrando duas para o segundo, e, depois, uma para o terceiro, de modo que, multiplicando esses números, há seis emparelhamentos possíveis:

(1)	$X - A$; $Y - B$; $Z - C$	(4)	$\boldsymbol{X - B}$; $Y - C$; $Z - A$
(2)	$X - A$; $Y - C$; $Z - B$	(5)	$X - C$; $Y - A$; $Z - B$
(3)	$\boldsymbol{X - B}$; $Y - A$; $Z - C$	(6)	$X - C$; $Y - B$; $Z - A$

Dentre essas seis possibilidades, podemos verificar pareamentos instáveis e estáveis, de acordo com a ideia de ganhos perdidos ou não.

As alocações que reúnem dois agentes que se preferem mutuamente são a 3 e a 4; isso porque as demais alocações não combinam Xavier e Beatriz, agentes que precisam, necessariamente, estar juntos porque se preferem mutuamente. Logo, o par (Xavier, Beatriz) bloqueia a formação de qualquer combinação de casais que não o una.

↪**Definição:** Um *par de bloqueio* é, como (A, Y) na definição de instabilidade acima, um par de agentes que preferiria estar pareado entre si a seus respectivos pares.

Além disso, um emparelhamento pode ser considerado bloqueado por um agente se, para ele, tal alocação for absolutamente inaceitável, isto é, pior do que continuar sem combinação. No caso do problema do casamento, trata-se da preferência por permanecer solteiro, uma variação do problema que estudaremos mais à frente, no próximo capítulo.

1.2 O mecanismo da aceitação postergada

Foi em busca de soluções estáveis aos problemas cotidianos que o algoritmo de Gale-Shapley foi estudado, testado empiricamente e, até mesmo, aplicado no mundo real, ainda que sua aplicação difira deste ideal em alguns pontos.

As operações para a promoção do casamento estável a partir deste algoritmo podem ser utilizadas tanto pelos homens, sendo quem propõe o casamento, como pelas mulheres, propondo-o ao grupo oposto. Ainda assim, o resultado das uniões não precisa ser necessariamente igual nas duas formas para que as alocações sejam consideradas estáveis, uma vez que qualquer alocação formada por este algoritmo é provada estável.

Quando temos situações com uma quantidade muito grande de elementos, como o número de vestibulandos procurando universidades, não é viável procurarmos todas as combinações possíveis entre os agentes e, depois, dentre estas, as que são estáveis (isto é, que não sofrem bloqueio e não são instáveis). Logo, a utilização do algoritmo será extremamente vantajosa para a descoberta mais rápida e eficiente de uma alocação estável, ainda que seu resultado seja somente a apresentação de uma única combinação possível de estabilidade dentre várias possíveis. Se é necessária a descoberta de todas as opções estáveis de alocação, teríamos que usar um segundo algoritmo para a resolução do problema, além do que apresentaremos.

Para expor esse raciocínio pelo qual se desenvolve o algoritmo de Gale-Shapley, segue uma demonstração do processo de alocação de casais em atribuições estáveis. A título de exemplo, tomamos o universo de 5 homens e 5 mulheres, sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Ana (A); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E).

A fim de seja respeitada a preferência individual de cada uma dessas pessoas, cada uma deve listar os membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento. Assim, o primeiro passo do algoritmo é que as pessoas de ambos os grupos listem as pessoas do grupo oposto segundo uma ordem de preferência.

> ↪**Notação:** Para denotar a preferência de A por X antes de Y, utilizamos o símbolo “>”, da seguinte forma: $X >_A Y$, que significa que A prefere X a Y. Além disso, utilizamos o mesmo sinal com o sentido oposto < na forma de $Y <_A X$ para, também, denotar que Y é menos preferível que X por A.

Começando pelos homens, Victor determina sua lista de preferência da seguinte forma: ele prefere Ana a Carolina, mas prefere Carolina a Débora. Senão, prefere Débora a Érica e, por fim, Érica é mais preferível que Beatriz. Sendo assim, sua primeira opção é Ana e sua última opção é Beatriz, ou seja:

$$\text{Victor: } A > C > D > E > B$$

Já Wilson ao fazer sua própria lista, ordena suas próprias preferências, de modo que escolhe Ana como a mulher mais preferível para se casar, preferindo-a a Débora. Admite, porém, que preferiria Débora a Érica e Érica a Beatriz, ainda que preferisse Beatriz a Carolina, de forma que Beatriz fosse sua penúltima opção, enquanto Carolina fosse a última, ou seja:

Wilson: $A > D > E > B > C$

Dessa forma, seguem-se as listas de preferência de cada indivíduo:

Victor:	$A > C > D > E > B$	Ana:	$Z > W > V > Y > X$
Wilson:	$A > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$
Xavier:	$D > C > B > A > E$	Carolina:	$Z > W > V > X > Y$
Yuri:	$A > D > B > E > C$	Débora:	$V > W > Y > X > Z$
Zé:	$C > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$

O segundo passo é a proposta de um grupo ao outro, segundo a lista de preferência de cada pessoa do grupo que faz alguma coisa. Nós identificaremos os homens como *agentes proponentes* e as mulheres, que somente poderão escolher dentre as propostas recebidas, como *agentes seletores*.

➥ **Notação:** Para denotar quem propõe a quem, usaremos uma flecha especial "$\rightsquigarrow$", da seguinte forma: X, Y, ... $\rightsquigarrow A$ que significa que X, Y, ... propõem para A. A escolha por este símbolo em especial é motivada pelo fato de que é utilizada em física para indicar transferência ou envio de informação, o que corresponde à situação de fazer uma proposta de casamento. Para indicar quando ninguém propõe a A, usaremos o símbolo de vazio: $\emptyset \rightsquigarrow A$.

Assim, os homens propõem às mulheres de que mais gostam, de forma a escolher a primeira em cada lista de preferência.

↪**Notação:** Para denotar o parceiro correspondente de cada indivíduo, utilizaremos a moldura $\boxed{}$ ao redor desse parceiro na lista do indivíduo.

As propostas da primeira rodada começam com:

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{A} > C > D > E > B$	$V \rightsquigarrow A$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{D} > C > B > A > E$	$X \rightsquigarrow D$
Yuri:	$\boxed{A} > D > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow A$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

A preferência de Victor, Wilson e Yuri é por Ana, de forma que todos eles propõem a ela, enquanto Xavier escolhe propor a Débora e Zé a Carolina, uma vez que são elas as mulheres de que eles mais gostam.

Em sequência, as mulheres que receberam pedidos ou propostas de casamento (se houver alguma) escolhem o parceiro que acreditam ser a opção mais atrativa, rejeitando as outras propostas.

↪**Notação:** Para indicar a escolha de um indivíduo a um outro, como a escolha de uma mulher por um homem, utilizaremos o símbolo ":", de forma que A: X significa que A escolhe a proposta de X.

Assim, cada mulher, ao analisar as propostas que recebeu (se recebeu alguma), escolhe, dentre os homens que lhe propuseram, aquele que é o mais preferível em sua lista de preferência rejeitando as demais propostas (se houver).

1ª Rodada – escolhas

$$\begin{array}{rlll} V, W, Y \rightsquigarrow A & \text{Ana:} & Z > \boxed{W} > V > Y > X & \therefore A{:}W \\ \emptyset \rightsquigarrow B & \text{Beatriz:} & V > X > Y > Z > W & \\ Z \rightsquigarrow C & \text{Carolina:} & \boxed{Z} > W > V > X > Y & \therefore C{:}Z \\ X \rightsquigarrow D & \text{Débora:} & V > W > Y > \boxed{X} > Z & \therefore D{:}X \\ \emptyset \rightsquigarrow E & \text{Érica:} & W > Z > X > Y > V & \end{array}$$

No caso de Ana, entre Victor, Wilson e Yuri, segundo sua lista de preferência, o preferido Wilson. Assim, ela escolhe Wilson. Já Carolina, por somente receber a proposta de Zé, escolhe-o automaticamente. Também Débora escolhe Xavier, porque é o único que lhe propõe. Portanto, na primeira rodada de propostas, as escolhas são feitas de tal modo, que Wilson é escolhido por Ana, Zé por Carolina e Xavier por Débora, enquanto Victor e Yuri são rejeitados por Ana.

Atenção: É importante registrar a rejeição por cada mulher nas listas dos homens pretendentes, para executar o algoritmo de forma manual. No papel, podemos optar por riscar as sucessivas opções, mas, aqui, adotaremos uma notação específica. Além disso, também é natural riscar as listas das mulheres, mas veremos que não há necessidade nesse caso.

> ➥**Notação:** Para denotar que A rejeitou V, marcaremos um circunflexo em $\hat{A}$ na lista de V.

Contudo, o processo continua com a segunda rodada de escolhas a partir de novas propostas feitas às mulheres pelos homens que foram rejeitados, de forma que os homens rejeitados façam, então, uma nova proposta, dessa vez, às mulheres que acreditam ser a segunda melhor opção.

2ª Rodada – propostas

Victor:	$\hat{A} > \boxed{C} > D > E > B$	$V \rightsquigarrow C$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{D} > C > B > A > E$	$X \rightsquigarrow D$
Yuri:	$\hat{A} > \boxed{D} > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow D$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

No caso de Victor, ao ser rejeitado por Ana, ele decide propor a Carolina, enquanto Yuri, também rejeitado por Ana, propõe a Débora. Os homens que foram escolhidos na rodada anterior continuam a propor às mesmas mulheres que os escolheram.

Dadas as novas propostas, as mulheres analisam suas novas opções, assim como as que haviam escolhido na etapa anterior, e escolhem uma delas cada, rejeitando as demais.

2ª Rodada – escolhas

$W \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$	$\therefore A{:}W$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	
$V, Z \rightsquigarrow C$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$	$\therefore C{:}Z$
$X, Y \rightsquigarrow D$	Débora:	$V > W > \boxed{Y} > X > Z$	$\therefore D{:}Y$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$	

Ana, por não receber nenhuma nova proposta, continua com Wilson, ao passo que Carolina, mesmo recebendo uma nova proposta por parte de Victor, continua a escolher Zé. Entre Xavier e a nova proposta de Yuri, Débora prefere Yuri, escolhendo, assim, trocar de parceiro. Consequentemente, Victor e Xavier são os homens rejeitados.

Uma vez que esse processo continua até que todos os homens sejam escolhidos por alguma mulher ou rejeitados por todas elas, dado que nenhum homem volta a propor a uma mulher que já o rejeitou (porque, uma vez rejeitado, ele a elimina de sua lista), a terceira rodada do algoritmo continua com novas propostas:

3ª Rodada – propostas

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	$V \rightsquigarrow D$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\hat{D} > \boxed{C} > B > A > E$	$X \rightsquigarrow C$
Yuri:	$\hat{A} > \boxed{D} > B > E > C$	$Y \rightsquigarrow D$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	$Z \rightsquigarrow C$

Xavier, que foi rejeitado por Débora, decide, nesta rodada, propor a Carolina, enquanto Victor, que foi rejeitado tanto por Ana como por Carolina, propõe agora a Débora. Ao mesmo tempo, as propostas anteriores bem-sucedidas mantêm os parceiros, como as uniões de Wilson e Ana, Yuri e Débora, Zé e Carolina.

Feitas as novas propostas, as mulheres que as receberam, Débora e Carolina, comparam tais pedidos, enquanto que as demais mulheres continuam com o companheiro escolhido anteriormente:

3ª Rodada – escolhas

$W \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$	$\therefore A{:}W$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	
$Z, X \rightsquigarrow C$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$	$\therefore C{:}Z$
$Y, V \rightsquigarrow D$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$	$\therefore D{:}V$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$	

Ao não receber nenhuma nova proposta, Ana continua com Wilson. Simultaneamente, Carolina também continua a escolher o mesmo parceiro da rodada anterior, Zé, ainda que tenha recebido uma proposta de Xavier. Contudo, Débora prefere trocar seu parceiro anterior, Yuri, ao escolher Victor como seu novo parceiro. Em conformidade com tais decisões, na terceira rodada de escolhas, temos Ana emparelhada a Wilson, Carolina com Zé e Débora com Victor, sendo as propostas de Xavier e Yuri as rejeitadas.

Por isso, na quarta rodada, Xavier e Yuri, os homens rejeitados na rodada anterior, fazem novas propostas, segundo a ordem de suas listas de preferência:

4ª Rodada – propostas e escolhas

Cada homem propõe à primeira mulher, em sua lista, que não o rejeitou:

$$V \rightsquigarrow D;\ W \rightsquigarrow A;\ X, Y \rightsquigarrow B;\ Z \rightsquigarrow C.$$

Cada mulher opta pelo melhor homem, em sua lista, que lhe propôs (agora ou na rodada anterior):

$$D : V;\ \ A : W;\ \ B : X;\ \ C : Z.$$

Dessa maneira, de acordo com o processo descrito, após essa nova rodada de propostas e escolhas, obtemos:

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > \boxed{X} > Y > Z > W$
Xavier:	$\hat{D} > \hat{C} > \boxed{B} > A > E$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} > \hat{B} > \boxed{E} > C$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > \boxed{Y} > V$

Devido ao de fato de que Beatriz, até então, não havia recebido nenhuma proposta, ao receber simultaneamente as propostas de Xavier e Yuri, ela decide que, entre eles, prefere Xavier. Dessa forma, Yuri é o único homem ainda rejeitado.

Portanto, na quinta rodada, somente Yuri faz uma nova proposta:

5ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow D;\ W \rightsquigarrow A;\ X \rightsquigarrow B;\ Y \rightsquigarrow E;\ Z \rightsquigarrow C.$$
$$D : V;\ A : W;\ B : X;\ E : Y;\ C : Z.$$

Mais uma vez ocorre uma mudança nas alocações a partir da nova proposta dessa rodada, feita por Yuri a Érica, após ser rejeitado três vezes. Ela aceita-o automaticamente por ser a única proposta que recebe:

Victor:	$\hat{A} > \hat{C} > \boxed{D} > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{W} > V > Y > X$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B > C$	Beatriz:	$V > \boxed{X} > Y > Z > W$
Xavier:	$\hat{D} > \hat{C} > \boxed{B} > A > E$	Carolina:	$\boxed{Z} > W > V > X > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} > \hat{B} > \boxed{E} > C$	Débora:	$\boxed{V} > W > Y > X > Z$
Zé:	$\boxed{C} > D > A > B > E$	Érica:	$W > Z > X > \boxed{Y} > V$

Finalmente, não é mais preciso continuar o processo, porque, nesta última rodada, nenhum homem foi rejeitado, de forma que todos os homens e mulheres estão agora casados em um emparelhamento considerado estável (não há nenhuma mulher que preferisse estar com algum homem que também preferisse estar com ela, ao invés de sua parceira).

Por exemplo, se Victor não é casado com Ana, mesmo que a preferisse como sua primeira opção ao invés de Débora (sua esposa), é porque, no passado, ele propôs a Ana, mas foi rejeitado em favor de alguém de que ela gostava mais, no caso, Wilson (e, caso Ana depois rejeitasse Wilson, seria por Zé, ainda melhor). Portanto, o par (V, A) não é um par de bloqueio e o mesmo raciocínio se aplica a qualquer outro par.

Note que o algoritmo sempre *termina*, isto é, sua execução chega a um término, porque: cada lista de preferência é finita; o número de agentes proponentes é finito; nenhum deles repete uma proposta após rejeição.

Nos próximos capítulos, teremos mais oportunidades de acompanhar o desenvolvimento do algoritmo Gale-Shapley passo a passo. A próxima seção contém exercícios que o leitor já pode efetuar, bastando que ignore a comparação dos emparelhamentos obtidos.

1.3 O conceito de otimalidade

Nesse mecanismo de alocações que distribui de maneira estável os indivíduos, há uma configuração específica nos resultados que impõe o algoritmo como mais favorável a um dos grupos, dos homens ou das mulheres, especificadamente àquele que faz as propostas. Isto porque quem faz as propostas, como os homens, no exemplo acima, começa sempre com a possibilidade de unir-se à sua melhor opção, por fazer o pedido a quem mais gosta, porém, se não for escolhido por ela, ainda tem chance de propor à sua segunda melhor opção e, se for rejeitado mais uma vez, pode fazer o pedido à sua terceira opção, e assim por diante, até que seja escolhido por uma ou rejeitado por todas. Consequentemente, como mostra a movimentação de sua moldura □ da esquerda para a direita, o homem termina o processo de alocação com a melhor opção possível de parceira que também o prefira.

Ao passo que uma mulher, ao depender dos pedidos dos homens, somente consegue escolher a melhor opção dentre as que recebe e não a que viria ser sua melhor opção na lista de preferências, pois, se o homem que mais lhe agrada não lhe propor, não poderá escolhê-lo. A partir da primeira proposta que recebe, pode escolher um parceiro e trocá-lo conforme receber uma proposta melhor a cada rodada, mas não é garantido que chegue até sua melhor opção, especialmente se receber somente uma proposta. Assim, suas escolhas, motivadas por suas preferências individuais, representadas pela moldura □, deslocam-se da direita para a esquerda, no sentido oposto ao dos homens. Concluímos que as mulheres obtêm suas piores opções possíveis.

Exemplo disso é o pareamento de Beatriz com Xavier, sua segunda melhor opção, no desenvolvimento da seção anterior: para isso, ela rejeitou a proposta de Yuri, mas, mesmo assim, não alcançou o que considera o melhor pareamento, uma vez que Victor, sua primeira escolha, não lhe fez nenhuma proposta.

Em vista disso, os economistas identificam a seguinte classificação:

➥**Definição:** Uma alocação é *ótima* para um conjunto de agentes se, nessa alocação, cada um obtém o melhor par que poderia obter em qualquer alocação.

Esse é o caso do emparelhamento realizado pelo algoritmo quando os homens propõem, sendo ótimo para o conjunto de todos os homens, dentre os demais emparelhamentos estáveis.

Para cada agente, o *melhor par possível* (ou seu "*ótimo*") não é, necessariamente, o primeiro em sua lista de preferência (em nosso exemplo, para Xavier, o melhor possível é Beatriz, e, não, Débora). É com esse cuidado que a literatura técnica faz tal referência e que também falaremos neste livro.

Observação: Nosso raciocínio com as molduras se deslocando, acima, *sugere* que o emparelhamento obtido é ótimo para o conjunto de agentes proponentes; porém, não constitui uma *demonstração*, que precisa considerar qualquer outro emparelhamento potencialmente melhor, não obtido pelo método descrito. Esse cuidado também será necessário no Capítulo 4, que versa sobre estratégias.

Para fazer a demonstração, suponha que um homem X pode casar, em um segundo emparelhamento pretensamente estável, com uma mulher A que prefere à esposa atribuída pela execução de Gale-Shapley com os homens proponentes. Então, A o rejeitou durante esta execução em nome de Y, a quem prefere. Dentre todas as situações, vamos trabalhar, portanto, com a *primeira vez* que uma tal A rejeita um tal X. Nesse caso, Y ainda não foi rejeitado, durante esta execução, por mulheres com quem poderia se casar num outro emparelhamento estável. Concluímos que todas as suas "esposas viáveis" são, digamos, B, C, ... $\leq_Y A$. Em particular, naquele segundo emparelhamento pretensamente estável, Y casa-se com alguma $B <_Y A$, então (Y, A) forma um par de bloqueio ao segundo emparelhamento, que não pode ser estável.

Outra característica do algoritmo é dada pelo fato de que, no desenvolver do mecanismo, utilizado tanto na forma de homens propondo como na de mulheres, a partir das mesmas listas de preferência, nem sempre os casais formados serão os mesmos nas duas situações, o que não impede que sejam considerados estáveis. Assim, caso sejam as mulheres a realizar propostas, podemos obter um outro emparelhamento, ótimo para as mulheres e péssimo para os homens. Nesse caso, é possível comparar todos os emparelhamentos estáveis e mostrar que se situam entre esses dois extremos, o ótimo para os homens e o ótimo para as mulheres.

No entanto, também é possível ocorrer situações, dependendo das listas de preferência, em que sejam formados casais iguais nos dois processos. Nessas situações, como qualquer outro emparelhamento estável deve estar entre os dois ótimos, concluímos que existe somente essa alocação estável, que é ótima para todos. Para os indivíduos envolvidos não há nenhuma outra alocação que os beneficie mais, sem comprometer a condição de estabilidade.

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo, a partir das mesmas listas de preferência do exemplo acima, do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, verificando a existência de emparelhamento ótimo para todos (com resultado igual ao exemplo acima). Repetimos as listas abaixo:

Ana:	$Z > W > V > Y > X$	Victor:	$A > C > D > E > B$
Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$	Wilson:	$A > D > E > B > C$
Carolina:	$Z > W > V > X > Y$	Xavier:	$D > C > B > A > E$
Débora:	$V > W > Y > X > Z$	Yuri:	$A > D > B > E > C$
Érica:	$W > Z > X > Y > V$	Zé:	$C > D > A > B > E$

Resultado: O emparelhamento é ótimo para todos, pois, em ambos os processos, obtemos os pares $V – D$; $W – A$; $X – B$; $Y – E$ e $Z – C$.

2) A partir das seguintes listas de preferência, determine os emparelhamentos feitos tanto quando os homens propõem como quando as mulheres propõem e analise se ocorre uma alocação ótima para todos:

Otávio (O):	$J > L > N > I > M$	Isabella (I):	$T > O > R > S > P$
Pedro (P):	$I > J > L > M > N$	Joana (J):	$T > S > R > O > P$
Rodrigo (R):	$I > M > J > L > N$	Laura (L):	$T > P > O > R > S$
Sérgio (S):	$J > L > M > I > N$	Marina (M):	$P > R > S > T > O$
Thiago (T):	$M > J > I > L > N$	Natália (N):	$R > O > S > P > T$

Resultado: Os pares formados quando os homens propõem são: $O – N, P – L, R – I, S – J, T – M$. Os pares formados quando as mulheres propõem são: $I – R, J – T, L – P, M – S, N – O$. Consequentemente, não há um emparelhamento ótimo para todos, porque as alocações diferem e os pares Sérgio–Joana e Thiago–Marina são trocados.

1.4 Programação de um computador

Esta seção é voltada ao leitor interessado na programação do algoritmo Gale-Shapley em um computador; em outras palavras, como o mesmo pode ser implementado em uma linguagem de programação sequencial.

A importância da noção de algoritmo e de ter algoritmos para resolver problemas é que tais métodos são totalmente especificados em uma sequência de passos ou etapas, não deixando nenhum procedimento ou escolha a critério de quem os utiliza. Desse modo, primeiramente, tais procedimentos podem ser delegados a máquinas que trabalham muito rápido, mas sem nenhuma criatividade: os computadores.

Em segundo lugar, se duas pessoas seguirem o mesmo algoritmo para resolver um mesmo problema (com as mesmas informações), elas deverão obter o mesmo resultado, ainda que trabalhem de modo independente. (Algoritmos podem, sim, utilizar fontes aleatórias de informação, com fins de simular um mesmo experimento ou montagem muitas vezes e variadamente, mas produzirão o mesmo resultado toda vez que a mesma sequência de informação for utilizada.) O resultado obtido com o algoritmo, por sua vez, é definido pelo método e passível de estudo formal, como vimos ao identificar a otimalidade de Gale-Shapley para os agentes proponentes, o que não seria possível para uma escolha arbitrária de emparelhamento estável, nem demonstrável sem conhecer o funcionamento do método.

A principal diferença desta seção em relação à apresentação anterior, que já é "procedural", consiste na representação apropriada das informações no computador, mas, fazemos, também, uma pequena modificação no procedimento em que, antes, as mulheres avaliavam todas as propostas recebidas, inclusive aquela selecionada na rodada anterior, enquanto agora avaliarão cada proposta assim que for recebida. Essa alteração pode diminuir o número de rodadas ou antecipar a rodada de rejeição para cada homem, mas mantém o mesmo resultado.

Utilizamos alguns raciocínios e estruturas presentes em Knuth (1997), especialmente sua Aula 6. Porém, não o seguimos totalmente; utilizamos alguma redundância e trabalhamos com nossa hipótese atual de um mesmo número de homens e mulheres, digamos n.

O programa representará tanto os homens como as mulheres como números de 1 a n. A primeira tarefa é ler e armazenar suas listas de preferência. Começamos com uma matriz ListasHomens, cuja posição (i,j) registra a j-ésima opção do homem i em ordem decrescente. Desse modo, ListasHomens é semelhante à listagem que fizemos no texto:

para i de 1 a n:
    para j de 1 a n:
        leia k (identificação da mulher);
        armazene k em ListasHomens (i,j).

As listas das mulheres serão armazenadas de um modo diferente, para facilitar a comparação das propostas recebidas: a posição (i,j) da matriz NotasMulheres identificará, para a mulher i, qual é a "nota" do homem j em sua lista, de modo que o primeiro homem tem nota n o segundo tem nota $n-1$ e assim por diante, até o último, que tem nota 1. Observe que os homens mais preferidos têm notas mais altas. Essa lista requer cuidado em seu carregamento, a partir das listas, como feitas nos exemplos:

para i de 1 a n:
    para k de 1 a n:
        leia j (identificação do homem);
        armazene $n + 1 - k$ em NotasMulheres (i,j).

Agora precisamos criar um registro de onde está a moldura nas listas dos homens e das mulheres. Para os homens, registraremos a posição da moldura, mas, para as mulheres, registraremos o conteúdo da moldura. Usaremos, para começar, o número 0, mas pode ser necessário adotar outro número ou símbolo, dependendo do uso dos índices acima na linguagem de programação. Também precisamos saber quem está rejeitado ou sem propostas.

```
para i de 1 a n:
    armazene 0 em MoldurasHomens(i) e NoivosMulheres(i);
    armazene SIM em HomensLivres(i) e MulheresLivres(i);
```

Agora, fazemos com que cada homem realize sua proposta e seja avaliado pela mulher eleita, que pode ou não o substituir em detrimento do anterior (se houver). Ela fará isso em uma cadeia de condicionais "se–caso contrário":

```
(*) para i de 1 a n:
    se HomensLivres(i) = SIM então:
        aumente MoldurasHomens(i) uma unidade;
        armazene MoldurasHomens(i) em j;
        se MulheresLivres(j) = SIM então:
            armazene i em NoivosMulheres(j)
            armazene NÃO em MulheresLivres(j) e HomensLivres(i).
        caso contrário, se
          NotasMulheres(j,i)>NotasMulheres(j), NoivosMulheres(j)
        então:
            armazene SIM em HomensLivres(NoivosMulheres(j);
            armazene NÃO em HomensLivres(i);
            armazene i em NoivosMulheres(j).
```

Devemos verificar se algum homem foi rejeitado, o que requer uma nova rodada de propostas:

```
para i de 1 a n:
    se HomensLivres(i) = SIM então:
        retorne ao ponto (*).
```

No caso de um número distinto de homens e mulheres, veremos, futuramente, que se deve incluir nessa condição o teste de ainda não ter percorrido toda a sua lista de preferência.

Finalmente, podemos imprimir os casais formados:

para *i* de 1 a *n*:
    escreva "*i* casado com MoldurasHomens(*i*)".

Uma preocupação moderna com algoritmos é sobre sua eficiência, isto é, o número de passos ou operações que o algoritmo requer que o computador faça, especialmente em função do tamanho do problema especificado, aqui, o número n de homens ou mulheres. Mesmo com os últimos avanços da tecnologia, preocupações com o tempo de execução e com o espaço necessário (tamanho da memória) são cotidianos, porque as dimensões dos problemas a serem tratados na prática também crescem rapidamente.

Informações mais apropriadas sobre eficiência, sua definição e seu cálculo, constituem um tema da ciência da computação e podem ser inicialmente obtidas em Knuth (1997) e Gusfield; Irving (1989). Aqui, relatamos apenas que Gale-Shapley, na forma desta seção, pode requerer passos da ordem de até n^2 para terminar; por "ordem", aqui, entende-se que esse número de passos, em função de n, é um polinômio de segundo grau ou é limitado por um tal polinômio; para valores muito grandes de n, o termo de segundo grau domina os demais. Note que também a entrada de dados, isto é, a leitura das listas de preferência, já requer $2n^2$ operações de leitura simples; então, é significativo que o procedimento em si não supere essa ordem.